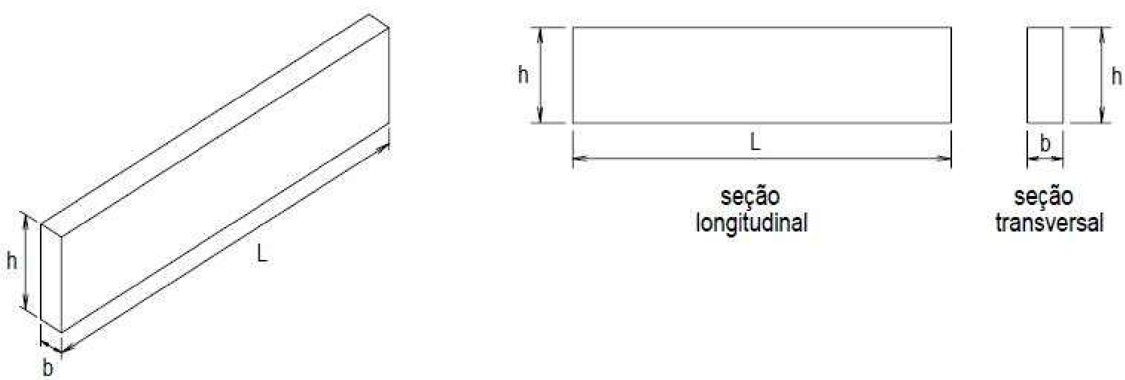
1. CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DE FIGURAS PLANAS

O dimensionamento e a verificação da capacidade resistente de barras, como de qualquer elemento estrutural dependem de grandezas chamadas tensões, as quais se distribuem ao longo das seções transversais de um corpo. Daí vem a necessidade de se conhecer claramente as características ou propriedades das figuras geométricas que formam essas seções transversais.

A Figura abaixo ilustra uma barra reta de seção transversal constante, chamada barra prismática. O lado da barra que contém o comprimento (L) e a altura (h) é chamado de seção longitudinal e o que contém a largura (b) e a altura (h) é chamado de seção transversal.



As principais propri edades geométricas de figuras planas são:

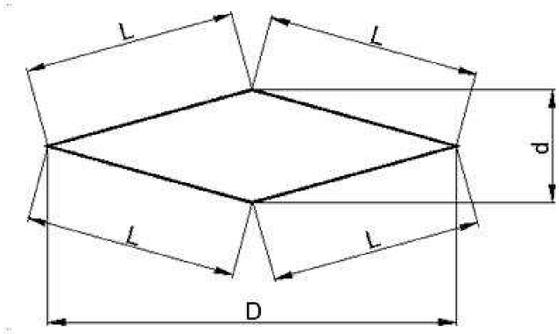
- ✓ Área **(A)** ;
- ✓ Momento estático **(M)** ;
- ✓ Centro de gravidade **(CG)** ;
- ✓ Momento de Inércia **(I)** ;
- ✓ Módulo de resistência **(W)** ;
- ✓ Raio de giração **(R)** ;

i. Área

A área de uma figura plana é a superfície limitada pelo seu contorno. Para contornos complexos, a área pode ser obtida aproximando-se a forma real pela justaposição de formas geométricas de área conhecida (retângulos, triângulos, (etc). A unidade de área é [L]2 (unidade de comprimento ao quadrado).
A área é utilizada para a determinação das tensões normais (tração e compressão) e das tensões de transversais ou de corte.

Exemplo:

Losango



$$A = \frac{D \times d}{2}$$

P = L + L + L + L

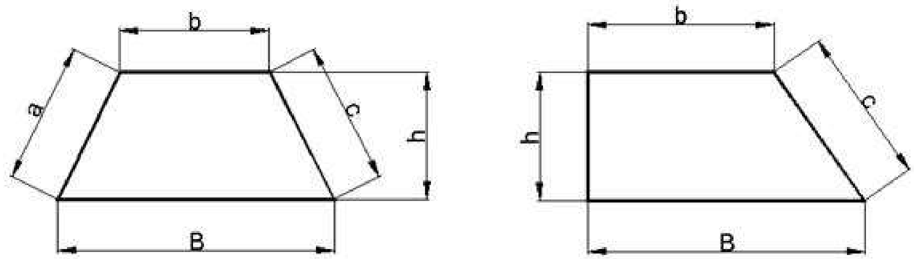
$$\boxed{P = 4 . L}$$

Onde:

D = diagonal maior

d = diagonal menor

Trapézio



$$\boxed{P = a + b + c + B}$$

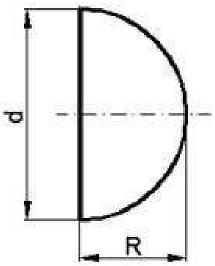
$$\boxed{P = h + b + c + B}$$

$$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

Onde:

B = Base maior
b = Base menor

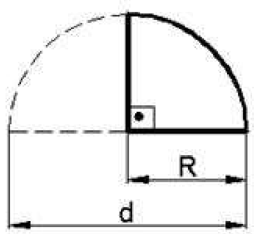
Semicírculo



$$A = \frac{\pi . R^2}{2} \qquad A = \frac{\pi . d^2}{8}$$

$$P = \pi . R + d \qquad P = \frac{\pi . d}{2} + d$$

Quadrante



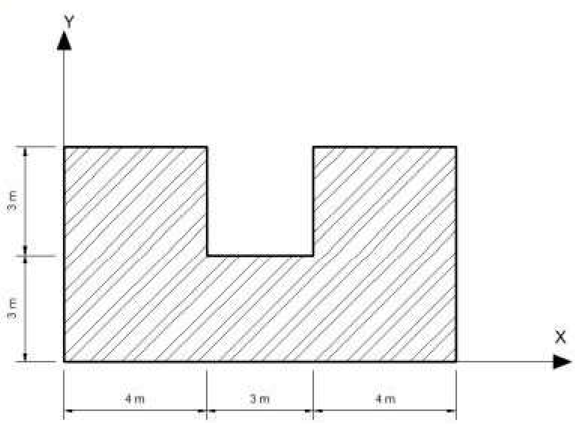
$$A = \frac{\pi . R^2}{4} \qquad A = \frac{\pi . d^2}{16}$$

$$P = \frac{\pi . R}{2} + d \qquad P = \frac{\pi . d}{4} + d$$

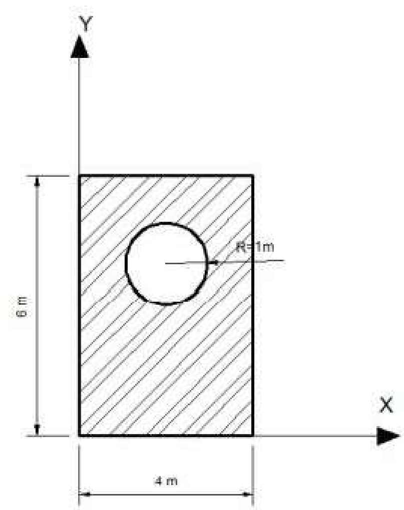
EXERÍCIOS PROPOSTO

Determinar a area das figuras abaixo incicadas:

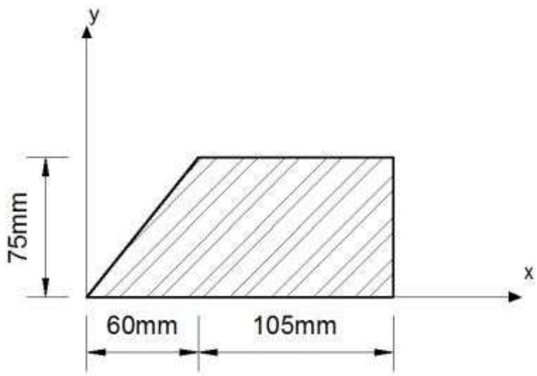
a)



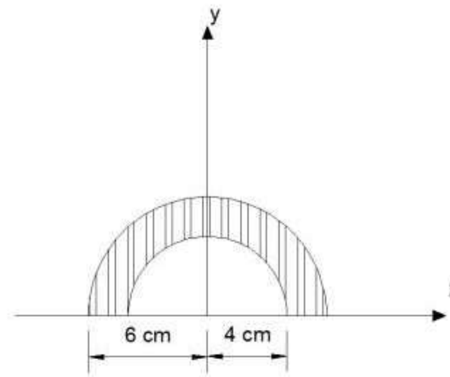
b)



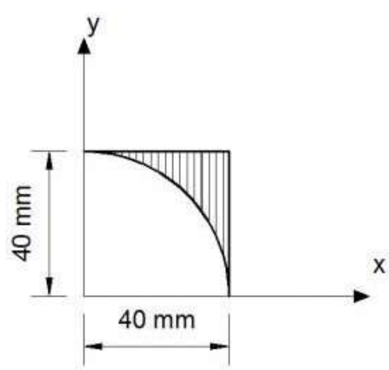
c)



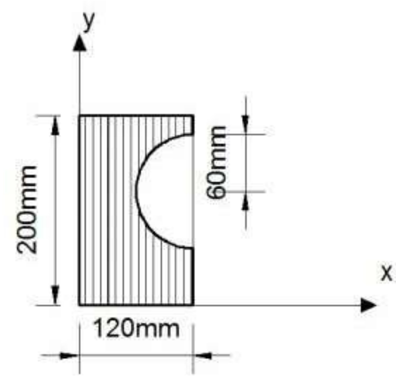
d)



e)



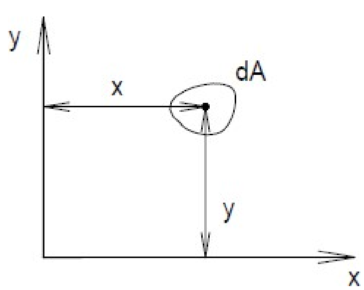
f)



ii. Momento Estático

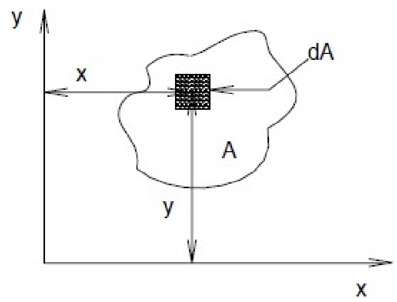
Analogamente à definição de momento de uma força em relação a um eixo qualquer, define-se **Momento Estático (M)** de um elemento de superfície como o **produto da área do elemento pela distância que o separa de um eixo de referência.**

- Mede a ação da distribuição da massa de um corpo;
- É utilizado para determinação de tenções transversais que ocorrem em uma peça submetida à flexão



$$M_x = y \cdot dA \quad \text{e} \quad M_y = x \cdot dA$$

Momento Estático de uma superfície plana - é definido como o somatório de todos os momentos estáticos dos elementos de superfície que formam superfície total.



$$M_x = \int_A y\,dA \quad \text{e} \quad M_y = \int_A x\,dA$$

- ✓ A unidade do Momento Estático é **[L]× [L]2 = [L]3** .

O Momento Estático de uma superfície composta por várias figuras conhecidas é o somatório dos Momentos Estáticos de cada figura.

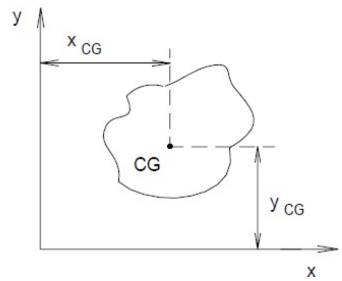
Exemplo 1 :

iii. Centro de gravidade (CG)

Se um corpo for dividido em partículas mínimas, estas ficam sujeitas à ação da gravidade, isto é, em todas estas partículas está aplicada uma força vertical atuando de cima para baixo. A resultante de todas estas forças verticais e paralelas entre si, constitui o peso do corpo.

Mesmo mudando a posição do corpo aplicando-lhe uma rotação, ele permanecerá sempre sujeito à ação da gravidade. Isto significa que as forças verticais girarão em relação ao corpo, mas continuaram sempre paralelas e verticais. O ponto onde se cruzam as resultantes dessas forças paralelas, qualquer que seja a posição do corpo, chama-se **Centro de Gravidade (CG)** .

Portanto, atração exercida pela Terra sobre um corpo rígido pode ser representada por uma única força **P**. Esta força, chamada ***peso do corpo***, é aplicada no seu baricentro, ou cento de gravidade
(CG). O centro de gravidade pode localizar-se dentro ou fora da superfície.
O centro de gravidade de uma superfície plana é, por definição, o ponto de coordenadas:

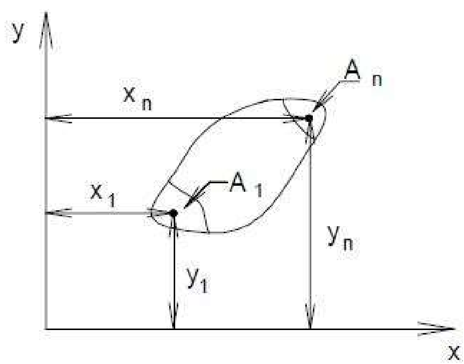


Onde:

XCG = distância do ***CG*** da figura até o eixo ***y*** escolhido ***arbitrariamente*** ;
YCG = distância do **CG** da figura até o eixo ***x*** escolhido ***arbitrariamente*** ;
Mx = momento estático da figura em relação ao eixo ***x***;
My = momento estático da figura em relação ao eixo y;
A = área da Figura.

✓ **Centro de gravidade de áreas compostas por várias figuras**

O centro de gravidade de uma superfície composta por várias figuras, é expresso por:



$$x_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

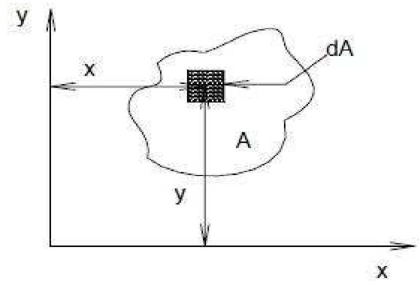
$$y_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

Exemplo 2 :

iv. Momento de Inércia

O momento de inércia de uma superfície plana em relação a um eixo de referência é definido como sendo a integral de área dos produtos dos elementos de área que compõem a superfície pelas suas respectivas distâncias ao eixo de referência, elevadas ao quadrado.

→ É a dificuldade que os corpos tem em se alterar o estado de movimento de um corpo em rotação.



$$I_x = \int_A y^2 dA$$

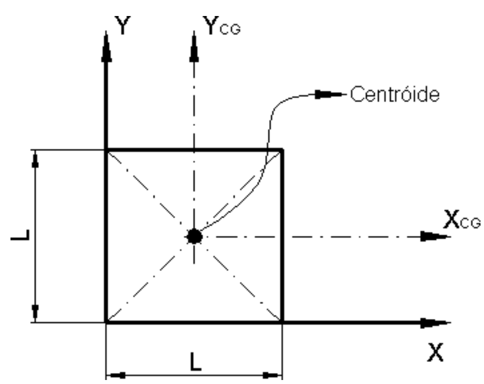
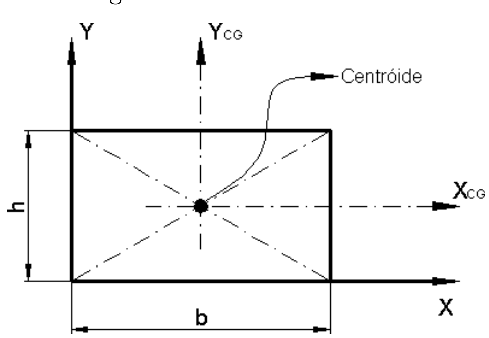
$$I_y = \int_A x^2 dA$$

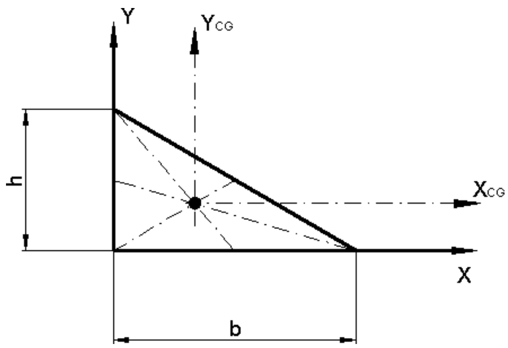
- ✓ A unidade do momento de inércia é $[L]^2 \times [L]^2 = [L]^4$.
- ✓ O momento de inércia é uma característica geométrica importantíssima no dimensionamento dos elementos estruturais, pois fornece, em valores numéricos, a resistência da peça. Quanto maior for o momento de inércia da seção transversal de uma peça, maior a sua resistência.

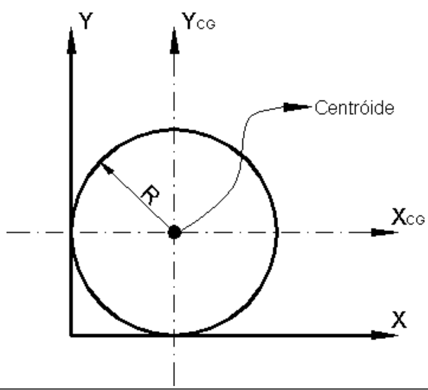
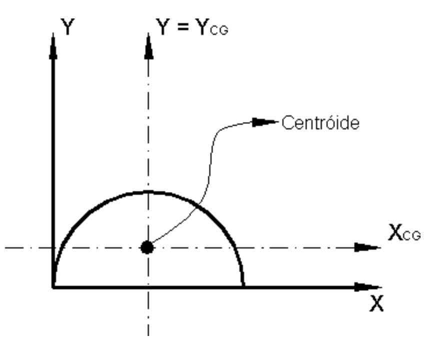
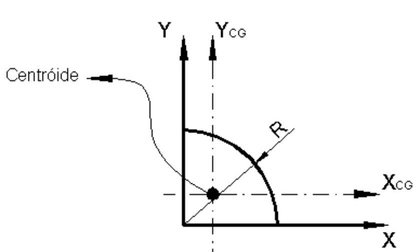
✓ **Propriedade:**

O momento de inércia total de uma superfície é o somatória dos momentos de inércia das figuras que a compõe.

Momento de Inércia das Figuras Planas

Figuras	**Ix**	**Iy**	$\overline{IX}$ **(Ix$_{CG}$)**	$\overline{IY}$ **(Iy$_{CG}$)**
1- Quadrado 	$\frac{L^4}{3}$	$\frac{L^4}{3}$	$\frac{L^4}{12}$	$\frac{L^4}{12}$
2- Retângulo 	$\frac{bh^3}{3}$	$\frac{hb^3}{3}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$

3- Triângulo qualquer 	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{36}$

Figuras	Ix	Iy	$\overline{IX}$(Ix CG)	$\overline{IY}$ (Iy CG)
4- Círculo 	$\frac{5\pi R^4}{4}$	$\frac{5\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$
5- Semicírculo 	$\frac{\pi R^4}{8}$	$\left(\frac{9\pi}{72}\right) xR^4$	$\left(\frac{9\pi^2 - 64}{72\pi}\right) xR^4$	$\left(\frac{9\pi^2 - 64}{72\pi}\right) xR^4$
6- Quadrante 	$\frac{\pi R^4}{16}$	$\frac{\pi R^4}{16}$	$\left(\frac{9\pi^2 - 64}{144\pi}\right) xR^4$	$\left(\frac{9\pi^2 - 64}{144\pi}\right) xR^4$

Exemplo 3 :

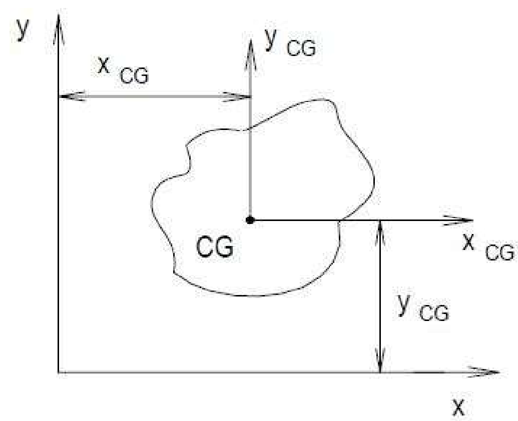
v. Translação de eixos ou teorema dos eixos paralelos

O momento de inércia de uma superfície em relação a um eixo qualquer é igual ao momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo seu centro de gravidade, acrescido do produto da área
(A) pelo quadrado da distância que separa os dois eixos.

Quando os eixos de giração e centro de gravidade não coincidem, aplica-se o teorema dos eixos paralelos ou a translação dos eixos. Este artificio é utilizado por exemplo, quando precisamos calcular o momento de inercia de superfícies composta. Neste caso o centro de gravidade de cada superfície dividida pode não coincidir com o centro de gravidade da peça inteira.

No teorema dos eixos paralelos sejam **X** e **Y** os eixos baricentros da superfície **A**, para determinar o momento de inercia da superfície, em relação aos eixos **X1** e **Y1** paralelos a **X** e **Y**, utilizam-se as seguintes expressões:

$$I_x = I_{x_{CG}} + A \cdot y_{CG}^2 \qquad I_y = I_{y_{CG}} + A \cdot x_{CG}^2$$



Onde:

Ix = Momento de inércia da figura em relação ao eixo x;
Iy = Momento de inércia da figura em relação ao eixo x;
XCG = Momento de inércia da figura em relação ao eixo CG x que passa pelo CG da figura;
YCG = Momento de inércia da figura em relação ao eixo CG y que passa pelo CG da figura;
CG x = Distância do eixo y até o eixo CG y;
CG y = Distância do eixo x até o eixo CG x.

- **As formulações acima podem ser expressas em função do momento estático:**

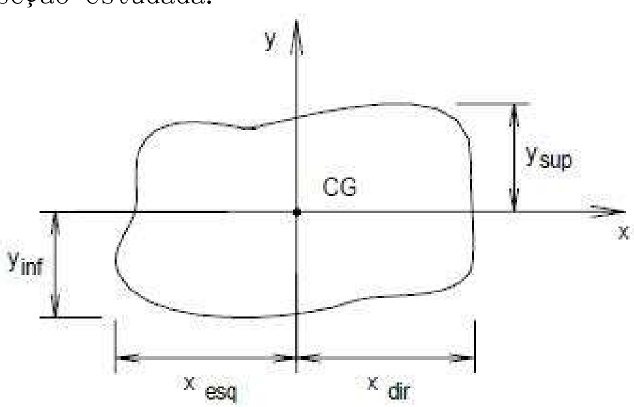
$$M_x = y \cdot A \quad \rightarrow \quad M_x^2 = y^2 \cdot A^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = \frac{M_x^2}{A^2}$$

$$I_x = I_{x_{CG}} + A \cdot y_{CG}^2 \quad \rightarrow \quad I_x = I_{x_{CG}} + \frac{M_x^2}{A^2} \cdot A \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} I_x = I_{x_{CG}} + \dfrac{M_x^2}{A} \\ \\ I_{x_{CG}} = I_x - \dfrac{M_x^2}{A} \end{cases}$$

Exemplo 4 :

vi. Módulo Resistente

Define-se módulo resistente de uma superfície plana em relação aos eixos que contém o **CG** como sendo a razão entre o momento de inércia relativo ao eixo que passa pelo **CG** da figura e a distância máxima entre o eixo e a extremidade da seção estudada.



$$W_x = \frac{I_{CG}}{y_{max}}$$

$$W_y = \frac{I_{CG}}{x_{max}}$$

Onde:
ICG = Momento de inércia da peça em relação ao **CG** da figura;
Y, X = Distância entre o eixo do **CG** da figura e a extremidade da peça.

A unidade do módulo resistente é **(L3)**.

Exemplo 5 :

vii. Raio de Giração

Define-se raio de giração como sendo a raiz quadrada da relação entre o momento de inércia e a área da superfície. A unidade do raio de giração é o comprimento. O raio de giração é utilizado para o estudo da flambagem.

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \qquad \sqrt{\frac{cm^4}{cm^2}} = cm$$

T